Connesの新しいCrossed ProductとIntegrable Representationについて(Operator Algebraとその応用)

数理解析研究所講究録
210巻 1974年 61-66

Connesの新しいcrossed productとintegrable representationについて

天王寺高校　榎本雅俊

最近、Connesがいくつかの興味ある概念をcrossed productと関連して展開していますので、ここではそれについて、簡単に紹介したいと思います。

先ず、Connesは新しくcrossed productを次の様に導入しています。

(Def. 1) Gをlocally compact group with the left Haar measure dgとし、λをGのleft regular representationとする。Mをvon Neumann algebra, σをGからMへのConnesの意味でのrepresentation (i.e., GからMのautomorphisms全体の作るgroupへのσ-weakly continuous homomorphism)とする。この時, $M \otimes_\sigma G$ (crossed product of M by σ)を、次のsetでDef.する。

$\{ y \in M \otimes \mathcal{L}(L^2(G)) ; (\sigma_g \otimes A\lambda(g)) y = y \text{ for } {}^\forall g \in G \}$. (但し, $A\lambda(g)(x) = \lambda(g) x \lambda(g)^{-1}$ (ここで, $x \in \mathcal{L}(L^2(G))$).

この様にcrossed productを新しくDef.すると、従来のもの

との関係が問題になるが、discreteの場合には、このDef.はもとのcrossed productと一致する。continuousの場合には、locally compact abelian groupの時に一致する。この事実を使うと次のpropositionが簡単に示される。

(Prop. 2) Mをtype I factor、σをlocally compact abelian group GからMへのrepresentationとする。この時、$M \otimes_\sigma G$は、type I von Neumann algebraになる。

(pr.) Mはtype I factorだから、σ_gはMのinner automorphismである。だから、$\sigma_g(x) = u_g x u_g^*$（但し、$u_g$は$M$のunitaryで、$x$は$M$の任意の元）と書ける。$M \otimes_\sigma G$は、$\sigma \otimes A\lambda$のfixed algebraだから、$M \otimes_\sigma G = \{u_g \otimes \lambda(g) ; g \in G\}'$になるが、$\{u_g \otimes \lambda(g) ; g \in G\}$は可換なsetだから、$M \otimes_\sigma G$はtype Iになる。

次に、integrable representationについて述べます。先ず、

(Def. 3) Gをlocally compact group with the left Haar measure dgとし、Mをvon Neumann algebra、σをGからMへのrepresentationとする。$\{x \in M ; \int_G \sigma_g(xx^*)dg \in M\}$が$M$でweakly denseである場合に、$\sigma$をintegrableであるという。

この時、$\{x \in M ; \int_G \sigma_g(xx^*)dg \in M\}$はleft idealであることに注意する。

integrable representationの例としては、Gをlocally compact group with the left Haar measure dg として、$M = \mathcal{L}(L^2(G))$, $U_g = A\lambda(g)$ とすれば、これが1つの例を与えていることがわかります。integrable representation については、次の事が成り立ちます。

(1) G を locally compact group, U を G から von Neumann algebra M への representation. N を σ-finite von Neumann algebra とする。もし、$U \otimes 1$ が G から $M \otimes N$ への integrable representation であるとすると、この時、U は integrable になる。

(pf.) N は σ-finite だから、faithful normal state Φ が N 上に取れる。$E = 1 \otimes \Phi$ を考えると、E は $M \otimes N$ から $M \otimes \mathbb{C}$ への conditional expectation である。この時、$E(U_g \otimes 1)(x) = (U_g \otimes 1)E(x)$ $(x \in M \otimes N)$ が成り立つ。もし、$x > 0$, $\int_G (U_g \otimes 1)(x)dg \in M \otimes N$ であれば、$E(x) > 0$, $\int_G (U_g \otimes 1)(E(x))dg \in M \otimes \mathbb{C}$.
$U \otimes 1$ が integrable から、$^\exists(x_\alpha) \subset (M \otimes N)^+$ ($M \otimes N$ の positive elements 全体); $x_\alpha \uparrow 1$ (strongly), $\int_G (U_g \otimes 1)(x_\alpha)dg \in M \otimes N$ for $^\forall\alpha$. $E(x_\alpha)$ を考えることにより、U が integrable であることがわかる。

(2) G を locally compact group, U, V を G から von Neumann algebra M, N への representation とする。もし、U が integrable とすると、この時、$U \otimes V$ は integrable となる。

(pf.) U が integrable ということから、$^\exists(a_\alpha) \subset M^+$; $a_\alpha \uparrow 1$

(strongly), $\int_G \sigma_g(a_\alpha)dg \in M$. 故に、$a_\alpha \otimes 1 \subset (M \otimes N)^+$; $a_\alpha \otimes 1 \uparrow 1$ (strongly), $\int_G (\sigma_g \otimes \tau_g)(a_\alpha \otimes 1)dg \in M \otimes N$ より、$\sigma \otimes \tau$ は integrable になる。

integrable representation を与える条件としては、次のような条件がある。

(Theorem 4) G を locally compact abelian group かつ metrizable であるとする。σ を G から von Neumann algebra M への representation で、for $\forall \gamma \in \Gamma (= \hat{G})$, $M(\sigma; \{\gamma\}) \ni {}^\exists$unitary の条件を満足しているとすると、この時に、σ は integrable になる。

証明の方針は、$\sigma \otimes 1$ が integrable であることを示せばよい訳です。これは、$U \otimes A\lambda$ を考えると、$A\lambda$ は integrable より、$U \otimes A\lambda$ は integrable になる。だから、$\sigma \otimes 1$ と $\sigma \otimes A\lambda$ が unitary 同値であることを示せばよい。

又、integrable representation とその fixed algebra の関係については次の事が成り立つ。

(Theorem 5) G を locally compact abelian group, σ を G から factor M への representation で、σ を $(M^\sigma)' \cap M$ へ制限した時、integrable とすると、この時、$(M^\sigma)' \cap M$ は type I である。

これを示すには、次の Theorem を示せば十分である。

(Theorem 6) G を locally compact abelian group, τ を G から von Neumann algebra N への integrable representation で、

$N^{\sigma} \subset \text{Center} N$ とする. この時, N は type I である.

何故かと言えば, $N = (M^{\sigma})' \cap M$ とし, $\sigma|_N = \sigma$ とする. この時, $x \in N^{\sigma}$ とすると, $x \in M^{\sigma}$ で, $x \in \text{Center} N$. つまり, $N^{\sigma} \subset \text{Center} N$ となるから.

(Theorem 6) について, $N^{\sigma} = \mathbb{C}$ (ergodic) としてもよい. この時, $\hat{G} = \Gamma$ として, $\Gamma(\sigma) = S_p(\sigma)$ は Γ の closed subgroup である. $G/\Gamma(\sigma)^{\perp}$ を考えることにより, 始めから $\Gamma(\sigma) = \Gamma$ としてよい. $\Gamma(\sigma) = \Gamma$ より, $N \otimes_{\sigma} G$ は type I factor であり, $(N \otimes G) \otimes \Gamma = N \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$ から, $(N \otimes G) \otimes \Gamma$ は (prop. 2) から type I に注意すると, N は type I になる.

最後に, Connes は 2 von Neumann algebras の間に次のような新しい概念を導入している.

(Def. 6) M_1, M_2 を von Neumann algebras とする. M_1, M_2 が du même genre と呼ばれるのは, for $\overset{\forall}{_{0}^{*}} e_1 \in M_1^p$ (M_1 の projection 全体) ($\overset{\forall}{_{0}^{*}} e_2 \in M_2^p$), $\overset{\exists}{_{0}^{*}} f_1 \leq e_1$, $\overset{\exists}{_{0}^{*}} f_2 \leq e_2$; $f_1 \in M_1^p$, $f_2 \in M_2^p$, $M_{1, f_1} \cong M_{2, f_2}$ を満たすこととする.

これに関して, du même genre を与えるものとしては,

(Theorem 7) G を locally compact group with the left Haar measure dg, M を von Neumann algebra, σ を G から M への integrable representation とする. この時, M^{σ} と $M \otimes_{\sigma} G$ は, du même genre である.

これを示すには、次の2つのLemmaを順次使えばよい.

(Lemma 8) G, M, U を Theorem 7 のものとする. この時.

$^{\exists}x(\neq 0)\in M\otimes\mathcal{L}(L^2(G))$; $x(1\otimes\lambda(g))=(U_g\otimes 1)(x)$ $(\forall g\in G)$

証明は. 具体的構成による.

(Lemma 9) U, G, M を Theorem 7 のものとする. この時.

$U\otimes 1$ と $U\otimes A\lambda$ は unitary 同値である.

証明は. (Lemma 8) と Connes の 2×2 matrix の方法を使う.